

10 клас (2 тур)

*«Два найважливіші дні у твоєму житті:
день, коли ти з'явився на світ, і день, коли ти зрозумів навіщо».*
Марк Твен

10.1. На столі лежить купка з n камінців. Петрик та Василь грають у таку гру. Вони по черзі беруть собі камінці з купки, причому своїм ходом Петрик може взяти рівно 2^k камінців для деякого цілого невід'ємного k , тобто 1, 2, 4, 8, ... камінців, якщо в купці є їх достатня кількість. Аналогічно, Василь своїм ходом може взяти рівно 3^m камінців для деякого цілого невід'ємного m , тобто 1, 3, 9, 27, ... камінців, якщо в купці є їх достатня кількість. Перемагає той, хто забере з купки останній камінець. Хто переможе за правильної гри обох, якщо починає Петрик?

10.2. Натуральні числа $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$ задовольняють умову:

$$a_{n+1} = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 + \dots + a_n^n,$$

для усіх натуральних чисел $1 \leq n \leq 2025$. Яку найбільшу можливу кількість степенів натуральних чисел з показником більшим за один може містити цей набір чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$?

10.3. На меншій дузі BC описаного кола ω трикутника ABC обрано довільну точку D , H – точка перетину висот $\triangle ABC$, точка M – середина сторони BC , а точка F симетрична точці D відносно точки M . Пряма DH вдруге перетинає коло ω в точці E , а P – точка перетину прямих BC та FH . Доведіть, що $PH = PE$.

10.4. Задане натуральне число $n \geq 3$. Сума додатних чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ дорівнює n . Доведіть, що справджується нерівність:

$$\frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2 x_3} + \frac{x_2^3}{x_2^2 + x_3 x_4} + \dots + \frac{x_{n-1}^3}{x_{n-1}^2 + x_1 x_2} + \frac{x_n^3}{x_n^2 + x_1 x_2} \geq \frac{n}{2}.$$

10 клас (2 тур)

*«Два найважливіші дні у твоєму житті:
день, коли ти з'явився на світ, і день, коли ти зрозумів навіщо».*
Марк Твен

10.1. На столі лежить купка з n камінців. Петрик та Василь грають у таку гру. Вони по черзі беруть собі камінці з купки, причому своїм ходом Петрик може взяти рівно 2^k камінців для деякого цілого невід'ємного k , тобто 1, 2, 4, 8, ... камінців, якщо в купці є їх достатня кількість. Аналогічно, Василь своїм ходом може взяти рівно 3^m камінців для деякого цілого невід'ємного m , тобто 1, 3, 9, 27, ... камінців, якщо в купці є їх достатня кількість. Перемагає той, хто забере з купки останній камінець. Хто переможе за правильної гри обох, якщо починає Петрик?

10.2. Натуральні числа $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$ задовольняють умову:

$$a_{n+1} = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 + \dots + a_n^n,$$

для усіх натуральних чисел $1 \leq n \leq 2025$. Яку найбільшу можливу кількість степенів натуральних чисел з показником більшим за один може містити цей набір чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$?

10.3. На меншій дузі BC описаного кола ω трикутника ABC обрано довільну точку D , H – точка перетину висот $\triangle ABC$, точка M – середина сторони BC , а точка F симетрична точці D відносно точки M . Пряма DH вдруге перетинає коло ω в точці E , а P – точка перетину прямих BC та FH . Доведіть, що $PH = PE$.

10.4. Задане натуральне число $n \geq 3$. Сума додатних чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ дорівнює n . Доведіть, що справджується нерівність:

$$\frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2 x_3} + \frac{x_2^3}{x_2^2 + x_3 x_4} + \dots + \frac{x_{n-1}^3}{x_{n-1}^2 + x_1 x_2} + \frac{x_n^3}{x_n^2 + x_1 x_2} \geq \frac{n}{2}.$$