

11 клас (2 тур)

*«Два найважливіші дні у твоєму житті:
день, коли ти з'явився на світ, і день, коли ти зрозумів навіщо».*
Марк Твен

11.1. Розв'яжіть в додатних числах рівняння

$$\left[\frac{1}{\{x\}} \right] = x^2.$$

Тут через $[y]$ позначено *цілу частину* числа y , тобто найбільше ціле число, що не перевищує y , а через $\{y\}$ позначено *дробову частину* числа y , тобто $\{y\} = y - [y]$. Наприклад, $[5,25] = 5$, $[\pi] = 3$, $[7] = 7$, $\left\{\frac{21}{4}\right\} = \frac{1}{4}$, $\{10\} = 0$.

11.2. Дано натуральне число $n > 1$. Для яких n довільний дільник $d < n$ цього числа можна подати у вигляді $d = x^2 + y^2$, де кожне з чисел x та y , не обов'язково різних, є дільником числа n або дорівнює 0?

11.3. Для взаємно простих натуральних чисел m, n знайдіть таку найбільшу додатну константу c , що в довільній множині S , яка містить рівно k натуральних чисел, можна вибрати принаймні $[kc]$ таких елементів, щоб жодні два вибрані елементи не відрізнялись рівно на m чи на n .

Через $[x]$ для довільного дійсного числа x позначене найменше ціле число, що не менше за x (*стеля* від x), наприклад, $[5] = 5$, $[\pi] = 4$.

11.4. Дано трикутник ABC з кутом $\angle C = 45^\circ$. Точка K на стороні BC та точка L на стороні AC вибрані так, що $\angle CAK = 2 \angle BAK$ та $\angle CBL = 2 \angle ABL$. Прямі AK та BL перетинаються в точці P . Точка N обрана так, що чотирикутник $PKNL$ – паралелограм. Точка P' симетрична до P відносно прямої AB , а точка C' симетрична C відносно прямої KL .

а) Доведіть, що центр описаного кола $\triangle CP'N$ лежить на прямій KL .

б) Доведіть, що точки A, N, B, C' лежать на одному колі.

11 клас (2 тур)

*«Два найважливіші дні у твоєму житті:
день, коли ти з'явився на світ, і день, коли ти зрозумів навіщо».*
Марк Твен

11.1. Розв'яжіть в додатних числах рівняння

$$\left[\frac{1}{\{x\}} \right] = x^2.$$

Тут через $[y]$ позначено *цілу частину* числа y , тобто найбільше ціле число, що не перевищує y , а через $\{y\}$ позначено *дробову частину* числа y , тобто $\{y\} = y - [y]$. Наприклад, $[5,25] = 5$, $[\pi] = 3$, $[7] = 7$, $\left\{\frac{21}{4}\right\} = \frac{1}{4}$, $\{10\} = 0$.

11.2. Дано натуральне число $n > 1$. Для яких n довільний дільник $d < n$ цього числа можна подати у вигляді $d = x^2 + y^2$, де кожне з чисел x та y , не обов'язково різних, є дільником числа n або дорівнює 0?

11.3. Для взаємно простих натуральних чисел m, n знайдіть таку найбільшу додатну константу c , що в довільній множині S , яка містить рівно k натуральних чисел, можна вибрати принаймні $[kc]$ таких елементів, щоб жодні два вибрані елементи не відрізнялись рівно на m чи на n .

Через $[x]$ для довільного дійсного числа x позначене найменше ціле число, що не менше за x (*стеля* від x), наприклад, $[5] = 5$, $[\pi] = 4$.

11.4. Дано трикутник ABC з кутом $\angle C = 45^\circ$. Точка K на стороні BC та точка L на стороні AC вибрані так, що $\angle CAK = 2 \angle BAK$ та $\angle CBL = 2 \angle ABL$. Прямі AK та BL перетинаються в точці P . Точка N обрана так, що чотирикутник $PKNL$ – паралелограм. Точка P' симетрична до P відносно прямої AB , а точка C' симетрична C відносно прямої KL .

а) Доведіть, що центр описаного кола $\triangle CP'N$ лежить на прямій KL .

б) Доведіть, що точки A, N, B, C' лежать на одному колі.