

9 клас (2 тур)

*«Два найважливіші дні у твоєму житті:
день, коли ти з'явився на світ, і день, коли ти зрозумів навіщо».*
Марк Твен

9.1. Розв'яжіть в раціональних числах x, y систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2(y^2 + y + 1) = y + 1, \\ y^2(x^2 + x + 1) = x + 1. \end{cases}$$

9.2. Натуральні числа $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$ задовольняють умову:

$$a_{n+1} = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 + \dots + a_n^n,$$

для усіх натуральних чисел $1 \leq n \leq 2025$. Яку найбільшу можливу кількість степенів натуральних чисел з показником більшим за один може містити цей набір чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$?

9.3. По колу стоять $9k$ точок. Їх пофарбували в 3 кольори так, що є рівно $3k$ точок кожного кольору. Чи завжди можна розрізати дане коло на такі три дуги, кожна з яких містить по $3k$ точок, щоб на одній з дуг було б принаймні k точок першого кольору, в другій – принаймні k точок другого кольору, а в третій – принаймні k точок третього кольору?

9.4. Нехай K – довільна точка сторони AD прямокутника $ABCD$. Точки E і F обрано на променях AB та DC відповідно так, що $AE = CK$ та $DF = BK$, а точка P лежить між прямими AB та CD так, що $\angle KCD = 2\angle PAB$ та $\angle KBA = 2\angle PDC$. Доведіть, що $\angle KPE = \angle KPF$.

9 клас (2 тур)

*«Два найважливіші дні у твоєму житті:
день, коли ти з'явився на світ, і день, коли ти зрозумів навіщо».*
Марк Твен

9.1. Розв'яжіть в раціональних числах x, y систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2(y^2 + y + 1) = y + 1, \\ y^2(x^2 + x + 1) = x + 1. \end{cases}$$

9.2. Натуральні числа $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$ задовольняють умову:

$$a_{n+1} = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 + \dots + a_n^n,$$

для усіх натуральних чисел $1 \leq n \leq 2025$. Яку найбільшу можливу кількість степенів натуральних чисел з показником більшим за один може містити цей набір чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$?

9.3. По колу стоять $9k$ точок. Їх пофарбували в 3 кольори так, що є рівно $3k$ точок кожного кольору. Чи завжди можна розрізати дане коло на такі три дуги, кожна з яких містить по $3k$ точок, щоб на одній з дуг було б принаймні k точок першого кольору, в другій – принаймні k точок другого кольору, а в третій – принаймні k точок третього кольору?

9.4. Нехай K – довільна точка сторони AD прямокутника $ABCD$. Точки E і F обрано на променях AB та DC відповідно так, що $AE = CK$ та $DF = BK$, а точка P лежить між прямими AB та CD так, що $\angle KCD = 2\angle PAB$ та $\angle KBA = 2\angle PDC$. Доведіть, що $\angle KPE = \angle KPF$.